

Robustezza delle reti sotto attacco

Alfredo Braunstein

Politecnico di Torino

Simposio “Acqua risorsa globale”
Torino, Maggio 2016

Problema 1: la dinamica LTM, un processo irreversibile

Problema 1: la dinamica LTM, un processo irreversibile



Problema 1: la dinamica LTM, un processo irreversibile

Dinamica a Soglia (LTM)

- Rete con N nodi i , e pesi f_{ij}
- Variabili binarie $x_i^t = 0, 1$

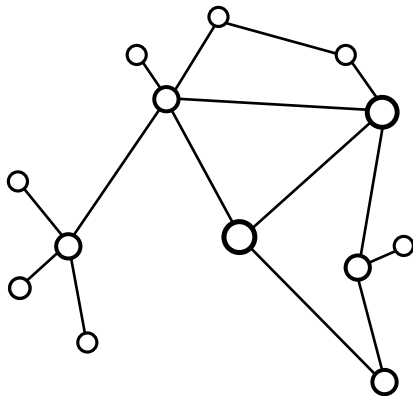


$$x_i^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i^t = 1 \text{ oppure } \sum_j \text{vicino di } i f_{ij} x_j^t \geq \theta_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- E.g. per $f_{ij} = 1$, $\theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$, dinamica “a maggioranza locale”
- Opinione [**Kempe et al'03**], shock economici [**Gai&Kapadia'10**], best-response, etc

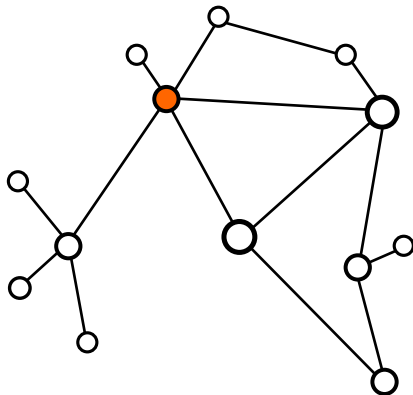
Esempio

$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



Esempio

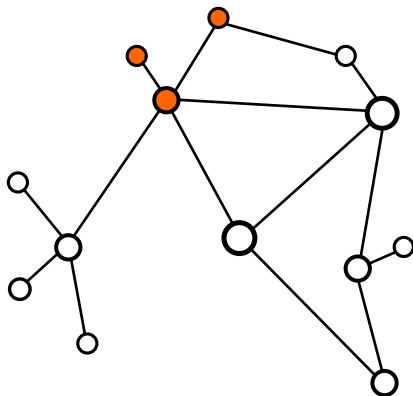
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 0$

Esempio

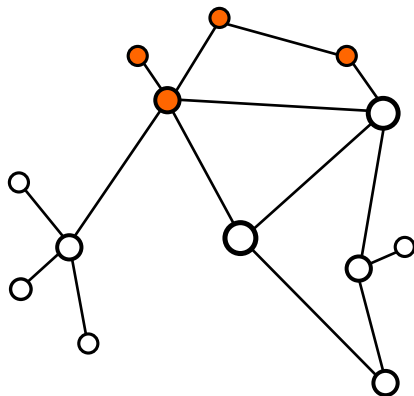
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 1$

Esempio

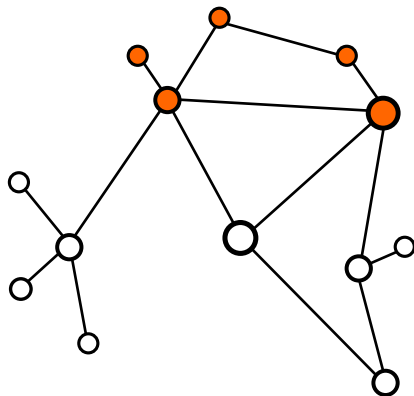
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 2$

Esempio

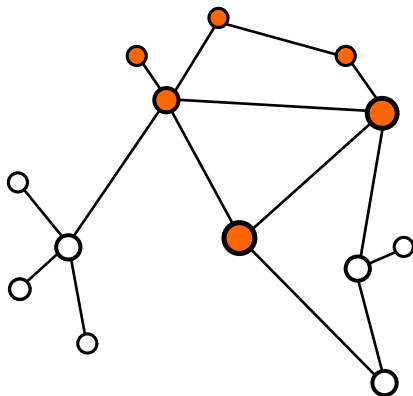
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 3$

Esempio

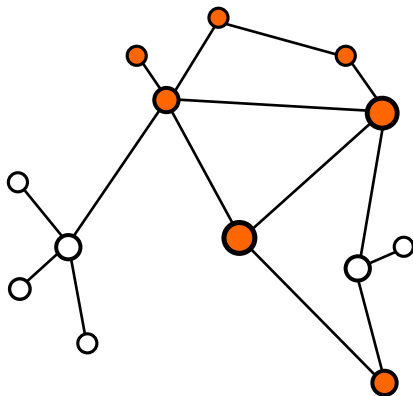
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 4$

Esempio

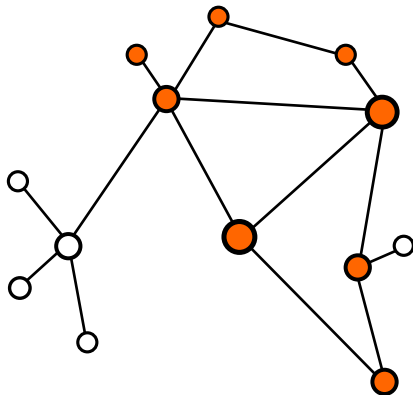
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 5$

Esempio

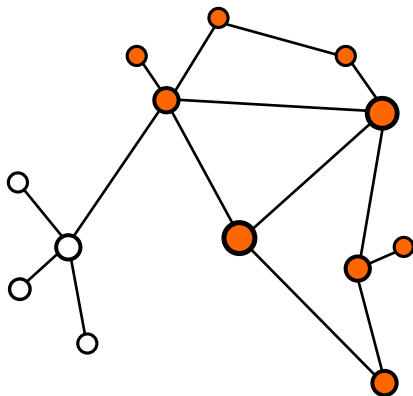
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 6$

Esempio

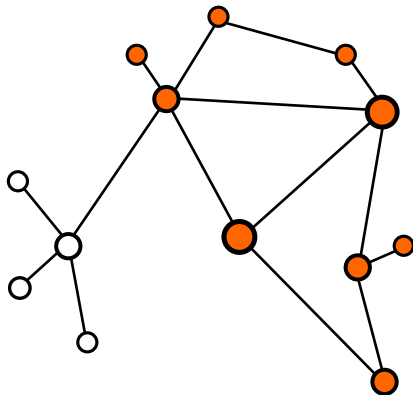
$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 7$

Esempio

$$f_{ij} = 1, \theta_i = \frac{1}{2} \# \text{vicini}$$



$t = 8$

Consideriamo un attacco *maligno*

- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0

Consideriamo un attacco *maligno*

- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0
- **Attivati:** $T(S)$ = nodi attivi a tempo ∞

Consideriamo un attacco *maligno*

- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0
- **Attivati:** $T(S)$ = nodi attivi a tempo ∞
- Obiettivo: trovare l'insieme più piccolo di **sorgenti** S che provochi **attivazione** totale $|T(S)| = N$

Consideriamo un attacco *maligno*

- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0
- **Attivati:** $T(S)$ = nodi attivi a tempo ∞
- Obiettivo: trovare l'insieme più piccolo di **sorgenti** S che provochi **attivazione** totale $|T(S)| = N$
- Più in generale: dati $\mu, \varepsilon > 0$, massimizzare **obj**(S) = $\varepsilon |T(S)| - \mu |S|$

Consideriamo un attacco *maligno*

- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0
- **Attivati:** $T(S)$ = nodi attivi a tempo ∞
- Obiettivo: trovare l'insieme più piccolo di **sorgenti** S che provochi **attivazione** totale $|T(S)| = N$
- Più in generale: dati $\mu, \varepsilon > 0$, massimizzare **obj**(S) = $\varepsilon |T(S)| - \mu |S|$
- Ancora più in generale: “descrivere” la distribuzione di probabilità

$$P(S) \propto e^{\text{obj}(S)}$$

Consideriamo un attacco *maligno*

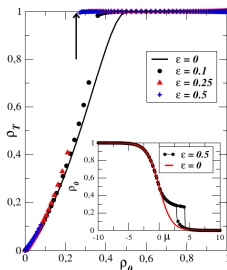
- **Sorgenti:** S = nodi attivi a tempo 0
- **Attivati:** $T(S)$ = nodi attivi a tempo ∞
- Obiettivo: trovare l'insieme più piccolo di **sorgenti** S che provochi **attivazione** totale $|T(S)| = N$
- Più in generale: dati $\mu, \varepsilon > 0$, massimizzare **obj**(S) = $\varepsilon |T(S)| - \mu |S|$
- Ancora più in generale: “descrivere” la distribuzione di probabilità

$$P(S) \propto e^{\text{obj}(S)}$$

- Altre varianti “pesate”

Transizioni di Fase in reti casuali

Approssimazioni Meccanico-Statistiche [JSTAT'13, PRE'13]
in reti regolari con $f_{ij} = 1$:



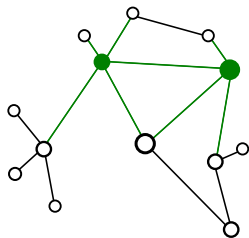
$$\rho_0 = |S|/N, \rho_T = |T(S)|/N, \mathbf{obj}(S) = \epsilon \rho_T - \mu \rho_0$$

$\theta = 2, K = 3, \epsilon = 0$ transizione continua

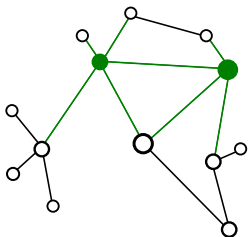
$\theta = 2, K = 3, \epsilon > 0$ transizione discontinua!

Problema 2: lo **smontaggio** di un grafo

- **C-SMONTAGGIO**: Dato un grafo G , trovare il minimo S tale che il grafo residuo $G-S$ risulti separato in componenti con $\leq C$ nodi

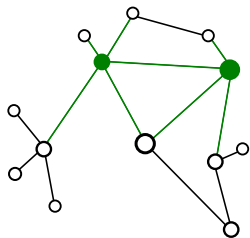


Problema 2: lo **smontaggio** di un grafo



- **C-SMONTAGGIO**: Dato un grafo G , trovare il minimo S tale che il grafo residuo $G-S$ risulti separato in componenti con $\leq C$ nodi
- Smontaggio=irrobustimento: se pensiamo a S come nodi immunizzati, **qualsunque** dinamica infettiva (casuale o maligna) in $G-S$ avrà effetti piccoli!

Problema 2: lo **smontaggio** di un grafo



- **C-SMONTAGGIO**: Dato un grafo G , trovare il minimo S tale che il grafo residuo $G-S$ risulti separato in componenti con $\leq C$ nodi
- Smontaggio=irrobustimento: se pensiamo a S come nodi immunizzati, **qualsunque** dinamica infettiva (casuale o maligna) in $G-S$ avrà effetti piccoli!
- Osservazione: un grafo senza cicli è facile da "smontare" (per esempio, ogni componente si può sempre dimezzare cancellando un solo nodo)

Hot topic!

LETTER

doi:10.1038/nature14604

Influence maximization in complex networks through optimal percolation

Flaviano Morone¹ & Hernán A. Makse¹

The whole frame of interconnections in complex networks hinges on a specific set of structural nodes, much smaller than the total size, which, if activated, would cause the spread of information to the whole network¹, or, if immunized, would prevent the diffusion

provides the mathematical support to the intuitive relation between influence and the concept of cohesion of a network: the most influential nodes are the ones forming the minimal set that guarantees a global connection of the network^{2,9,10}. We call this minimal set the

NEWS & VIEWS

For News & Views online, go to nature.com/newsandviews

NETWORK SCIENCE

Destruction perfected

Pinpointing the nodes whose removal most effectively disrupts a network has become a lot easier with the development of an efficient algorithm. Potential applications might include cybersecurity and disease control. [SEE LETTER P.65](#)

ISTVÁN A. KOVÁCS & ALBERT-LÁSZLÓ BARABÁSI

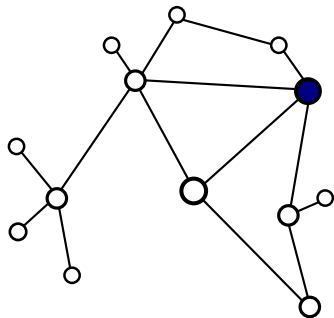
▲ [enduring truth of network science](#)

which deletion would cause maximum damage is a non-deterministic polynomial-time hard (NP-hard) problem¹. This means that it is computationally feasible only for small networks

(known as influencers) and recalculating the collective influence of the rest following each operation. The authors show that, for large networks, removing the set of influencers

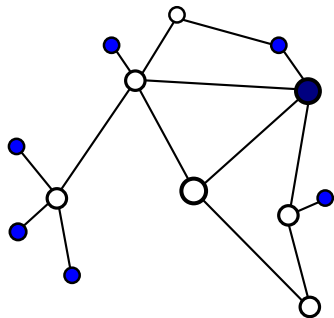
Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di “sfogliaggio” nella rete residua



Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

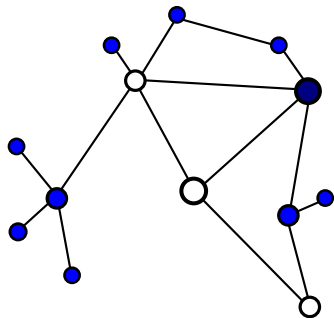
- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di "sfogliaggio" nella rete residua



$t = 1$

Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

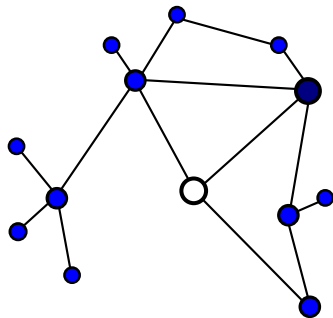
- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di “sfogliaggio” nella rete residua



$t = 2$

Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

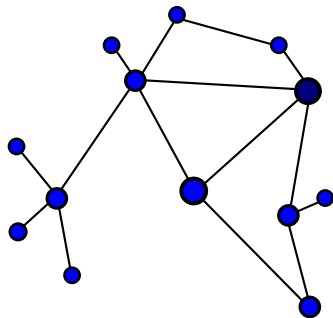
- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di “sfogliaggio” nella rete residua



$t = 3$

Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

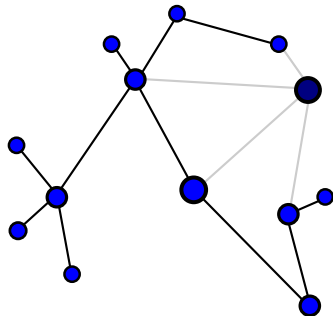
- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di “sfogliaggio” nella rete residua



$t = 4$

Il LTM con $\theta_i = k_i - 1$, lo scheletro di una rete

- In quelle condizioni, la dinamica LTM è quella di “sfogliaggio” nella rete residua



attivazione totale = grafo residuo senza cicli!

Smontaggio in due tempi

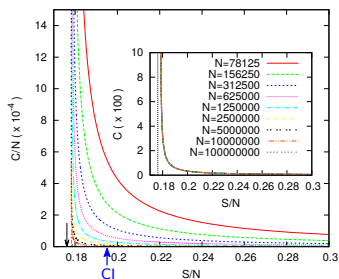
- Smontaggio di G in due tempi:

- 1 Cancellare nodi per renderlo aciclico (difficile),
- 2 Smontare il grafo aciclico cancellando altri nodi (facile)

Smontaggio in due tempi

■ Smontaggio di G in due tempi:

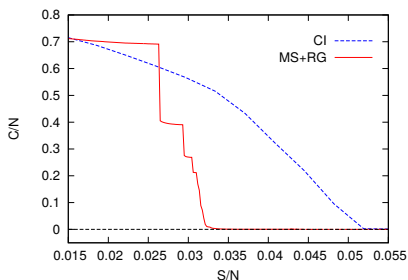
- 1 Cancellare nodi per renderlo aciclico (difficile),
- 2 Smontare il grafo aciclico cancellando altri nodi (facile)



grafo random, $\langle \text{vicini} \rangle = 3.5$

■ CI: [[Nature Morone&Makse'15](#)]

■ MS+RG: [[arXiv:1603.08883](#)]

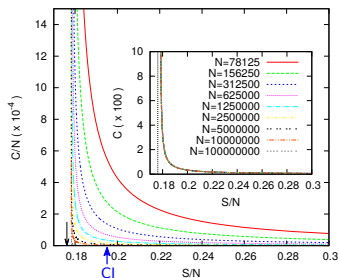


Twitter

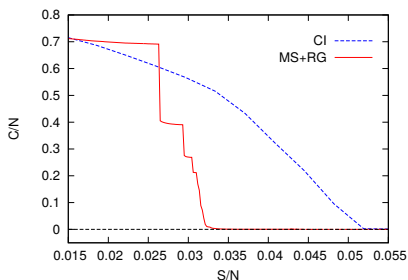
Smontaggio in due tempi

■ Smontaggio di G in due tempi:

- 1 Cancellare nodi per renderlo aciclico (difficile),
- 2 Smontare il grafo aciclico cancellando altri nodi (facile)



grafo random, $\langle \text{vicini} \rangle = 3.5$



Twitter

■ CI: [[Nature Morone&Makse'15](#)]

■ MS+RG: [[arXiv:1603.08883](#)]

Grazie per la vostra attenzione! Domande?